Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
3 Φεβρουαρίου 2014

Θέμα 1. (α΄) Βρείτε δύο σταθερές $c, C > 0$ έτσι ώστε $c\|\bar{x}\|_\infty \le \|\bar{x}\| \le C\|\bar{x}\|_\infty \ \forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, όπου $\|\bar{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ και $\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$ για $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Πώς λέγονται δύο νόρμες $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ που ικανοποιούν την πιο πάνω συνθήκη;

(β΄) Δείξτε ότι οι $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, είναι συνεχείς για κάθε $i = 1, \dots, n$.

(γ΄) Δείξτε ότι η μοναδιαία σφαίρα $S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}\| = 1\}$ είναι συμπαγής.

(δ΄) Εξετάστε την $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0,0) = 0$ και $f(x,y,z) = \dfrac{xyz - x^2y}{\|(x,y,z)\|^3}$ αν $\|(x,y,z)\| > 0$ ως προς τη συνέχειά της.

Θέμα 2. Δίνεται η $f : U \to \mathbb{R}$ με $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$ και $f(x,y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

(α΄) Δείξτε ότι η f είναι δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και υπολογίστε την παράγωγο και τον Εσσιανό πίνακα της f σε κάθε $(x,y) \in U$.

(β΄) Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της f με χρήση της παραγώγου και του Εσσιανού πίνακα και χαρακτηρίστε τα. Δώστε το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $(0,0)$.

(γ΄) Δώστε την καμπύλη στάθμης 1 της f, $L_f(1)$, παραμετρικοποιήστε την, υπολογίστε το εφαπτόμενο διάνυσμά της σε κάθε $(x,y) \in L_f(1)$ και εκφράστε το με χρήση των x και y.

(δ΄) Υπολογίστε την κατεύθυνση του μεγαλύτερου ρυθμού μεταβολής της f στο $(x,y) \in L_f(1)$ και τη γωνία της κατεύθυνσης αυτής με το εφαπτόμενο διάνυσμα που βρήκατε στο (γ').

Θέμα 3. (α΄) Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor δευτέρου βαθμού της $f(x,y) = \log(xy)$ γύρω από το $(1,1)$, καθώς και το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\log(xy) - x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2(x + y - 1)}.$$

(β΄) Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f(x,y) = e^{xy}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, στον κλειστό κυκλικό δίσκο $\bar{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2\}$ και χαρακτηρίστε τα.

(γ΄) Δείξτε ότι μπορείτε να επιλύσετε την εξίσωση $xy^2 - 2y + x^2 + 2 = 0$ ως προς $y(x)$ σε μια περιοχή του $(x_0, y_0) = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$, υπολογίστε την παράγωγο $y'(-1)$ και αποδείξτε τον τύπο που χρησιμοποιήσατε.

Θέμα 4. Δείξτε ότι:

(α΄) Αν οι $\bar{f}, \bar{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμες, τότε και η $\bar{f} + \bar{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη με $D(\bar{f} + \bar{g}) = D\bar{f} + D\bar{g}$.

(β΄) Η $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

(γ΄) Η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $|f(\bar{x})| \le \|\bar{x}\|^2 \ \forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{0}$.

(δ΄) Αν η $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη και έχει διαφορίσιμη αντίστροφη $\bar{f}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, τότε $D\bar{f}^{-1}(\bar{y}) = \left[D\bar{f}(\bar{x})\right]^{-1} \ \forall\ \bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$.

Κάθε (α'), (β'), (γ'), (δ') λαμβάνει 0.7 μονάδες.
Λαμβάνονται υπόψη μόνο δικαιολογημένες απαντήσεις!
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!